2. kolokwium z Analizy Matematycznej I.2 2022/23
25 maja 2023, 14.15-17.15

Za rozwiązanie każdego z zadań 1-5 można uzyskać 10 punktów. Należy wybrać dowolne cztery zadania z podanego zestawu. Uzyskanie z tych czterech zadań 40 punktów daje w sumie 40% oceny z ćwiczeń.

Dla osób **chętnych**: *można rozwiązać wszystkie 5 zadań i otrzymać w ten sposób dodatkowe punkty, które zostaną doliczone do końcowego wyniku.*

Rozwiązanie każdego zadania należy oddać **na osobnej kartce, podpisanej** *swoim imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu, a także nazwiskiem prowadzącego ćwiczenia lub numerem grupy ćwiczeniowej.* *Rozwiązania* **należy szczegółowo uzasadnić**, *powołując się na fakty znane z wykładu bądź z ćwiczeń.*

• **Zadanie 1.** Rozstrzygnąć, czy ciąg funkcyjny

$$f_n(x) = \frac{n^2 + nx}{n^2 + x^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

jest zbieżny jednostajnie na przedziale

• a) $[0, a]$, gdzie $a > 0$ jest ustaloną liczbą;

• b) $[0, \infty)$.

Zadanie 2. Określamy funkcję f wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{x + n}.$$

• a) Dowieść, że f jest poprawnie określona oraz różniczkowalna na przedziale $(0, \infty)$.

b) Rozstrzygnąć, czy istnieje granica $\lim_{x \to 0+} x f(x)$.

Zadanie 3. Niech

$$f(x) = \frac{1}{x^3}\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^3} - e^{x^2}\right).$$

a) Wykazać, że można tak określić wartość $f(0)$, aby funkcja f była nieskończenie wiele razy różniczkowalna na przedziale $(-1, 1)$.

b) Wyznaczyć $f^{(2023)}(0)$.

• **Zadanie 4.** Określamy funkcję f jako sumę szeregu potęgowego

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n + 2)2^{2n}}.$$

• (a) Wyznaczyć promień zbieżności R powyższego szeregu.

• (b) Udowodnić, że szereg jest zbieżny w $x = R$.

• (c) Wyznaczyć $f(R)$.

• **Zadanie 5.** Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx \quad \text{dla } x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$